CC1– Durée :1h

Les documents et appareils électroniques (calculatrice, téléphone, ordinateur, ...) sont interdits. ***Toutes les réponses doivent être justifiées.***

Exercice 1 - Délais administratifs et politique

On s'intéresse au délai nécessaire pour obtenir une réponse de la part d'une administration. Une inspection préalables des données passées suggère de modéliser les temps de réponse comme des variables aléatoires i.i.d. selon une loi exponentielle de paramètre d'échelle σ inconnu. On rappelle les éléments suivants sur la loi exponentielle de paramètre d'échelle σ :

— densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) : $\frac{e^{-\frac{x}{\sigma}}}{\sigma}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$,
— fonction caractéristique : $\phi_\sigma(t) = \left(\frac{1}{1-i\sigma t}\right)$,
— espérance σ, variance σ^2.

Pour estimer σ, on collecte des délais administratifs i.i.d $X_1, \ldots, X_n$, et on introduit deux estimateurs du paramètre d'échelle :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \\ \tilde{\sigma}_n &= n \min_{j=1,\ldots,n} X_i. \end{aligned}$$

1. Donner le modèle statistique.
2. Donner les lois de $\hat{\sigma}_n$ et $\tilde{\sigma}_n$.
3. Calculer le biais et le risque quadratique de $\hat{\sigma}_n$ et $\tilde{\sigma}_n$.
4. $(\hat{\sigma}_n)_{n\geq 1}$ est-elle consistante ?
5. $(\tilde{\sigma}_n)_{n\geq 1}$ est-elle consistante ?
6. Proposer une région de confiance de taux de couverture $1-\alpha$, pour $\alpha \in]0,1[$.
7. On suppose $n \to \infty$. Proposer un intervalle de confiance de taux de couverture asymptotique $1-\alpha$.

Un gouvernement relativement récent a essayé de réduire ce délai de traitement administratif par une série de mesures regroupées sous le terme de "choc de simplification". Pour vérifier si ce choc de simplification a eu lieu, on effectue une nouvelle campagne d'observations Y_i, $i = 1, \ldots, n$, i.i.d. de lois exponentielle de paramètre d'échelle θ (que l'on espère plus petit que σ et qui reste inconnu). On veut tester

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = \sigma, && \text{pas de choc de simplification} \\ H_1 &: \theta < \sigma, && \text{choc de simplification.} \end{aligned}$$

On propose la statistique de test

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{Y_i < X_i}.$$

8. Quelle est la loi de T_n sous H_0 ? Proposer un test de niveau α.
9. Lorsque $n \to \infty$, proposer un test de niveau asymptotique α.