Corrigé CC1 - Stats Fonda 2019/2020

1- Modèle : $\{(\mathbb{R}^{+*})^n, \mathcal{B}((\mathbb{R}^{+*})^n), \{P_\sigma^{\otimes n}\}_{\sigma > 0}\}$,

où $P_\sigma(dx) = \frac{e^{-x/\sigma}}{\sigma} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)dx$ (dominé

par λ_n, mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n)$).

2- On a $X_i \sim \Gamma(1, 1/\sigma)$, et les $(X_i)_{i=1..n}$

sont iid, donc $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \frac{1}{\sigma})$, et

donc $\hat{\sigma}_n^1 \overset{(loi)}{=} \Gamma(n, n/\sigma)$. De même,

$\min_{i=1..n} X_i \sim \Gamma(1, n/\sigma)$, et donc $n \min_{i=1..n} X_i$

$\sim \Gamma(1, 1/\sigma)$.

3- On a $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_n^1) = n \times \frac{\sigma}{n} = \sigma$, $\mathbb{E}(\tilde{\sigma}_n) = \sigma$.

Donc

$$E_\sigma((\hat{\sigma}_n^1 - \sigma)^2) = Var_\sigma(\Gamma(n, n/\sigma)) = n\, Var(\mathcal{E}(n/\sigma))$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\mathbb{E}_\sigma((\tilde{\sigma}_n - \sigma)^2) = Var_\sigma((\Gamma(1, \tfrac{1}{\sigma})) = \sigma^2.$$

4- Comme $\mathbb{E}(|X_1|) = \sigma < +\infty$, on a

$\hat{\sigma}_n^1 \xrightarrow{L_1} \sigma$ par la loi des grands nombres.

Donc $\hat{\sigma}_n^1$ est consistante.

5- On a

$$\mathbb{P}(|\tilde{\sigma}_n - \sigma| \geq 1) \geq \mathbb{P}(n \min_{i=1..n} X_i \geq 1+\sigma)$$
$$\geq \mathbb{P}(\Gamma(1, \tfrac{1}{\sigma}) \geq 1+\sigma)$$
$$\geq \int_{1+\sigma}^{+\infty} \frac{u}{\sigma} e^{-u/\sigma} du > 0.$$

Donc $\mathbb{P}(|\tilde{\sigma}_n - \sigma| \geq 1) \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$, et donc $\tilde{\sigma}_n$

pas consistant.

6- On note $q_\beta^{(1)}$ le quantile d'ordre β d'une

loi $\Gamma(n, n)$.

Pour $n \geq 1$, $\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma} \overset{(loi)}{=} \Gamma(n,n)$. Pour $\alpha \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}\left(q^{(1)}_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma} \leq q^{(1)}_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha, \text{ donc}$$

$$I^{(1)} = \left[\frac{\hat{\sigma}_n}{q^{(1)}_{1-\alpha/2}}, \frac{\hat{\sigma}_n}{q^{(1)}_{\alpha/2}}\right] \text{ est un } IC(1-\alpha).$$

7- Comme $E_\sigma(|X_1|^2) = 2\sigma^2 < +\infty$, le théorème central limite donne

$$\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\sigma}_n - \sigma)}{\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1).$$

Si, pour $\beta \in]0,1[$, $q^{(2)}_\beta$ est le quantile d'ordre β d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma} - 1\right) \in [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1-\alpha$$

Donc $I^{(2)} = \left[\hat{\sigma}_n\left(\frac{1}{1+q_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}}\right), \hat{\sigma}_n\left(\frac{1}{1-q_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}}\right)\right]$

est un $IC(1-\alpha)$.

8- Sous H_0, pour $i \in [\![1,n]\!]$ $Y_i \overset{(loi)}{=} X_i \overset{(loi)}{=} \Gamma(1, \frac{1}{\sigma})$,

avec $X_i \perp\!\!\!\perp Y_i$. Donc $(X_i - Y_i) \overset{(loi)}{=} (Y_i - X_i)$. Donc

$\mathbb{P}_{H_0}(X_i < Y_i) = \mathbb{P}_{H_0}(Y_i < X_i)$. Comme $\mathbb{P}_{H_0}(\{Y_i = X_i\}) = 0$,

On a $\mathbb{P}_{H_0}(\{Y_i < X_i\}) = \frac{1}{2}$.

Donc, sous H_0, $T_n \overset{(loi)}{=} \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Si on définit $\phi = 1_{T_n \geq k_\alpha}$, avec

k_α vérifiant

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,\tfrac{1}{2}) \geq k_\alpha) \leq \alpha < \mathbb{P}(\mathcal{B}(n,\tfrac{1}{2}) > k_\alpha - 1),$$

on a un test de niveau α.

9- Lorsque $n \to +\infty$, sous H_0, $2\sqrt{n}\left(\frac{T_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0,1)$.

Si $q^{(2)}_\beta$ quantile d'ordre α d'une $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\phi^{(2)} = 1_{2\sqrt{n}\left(\frac{T_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \geq q_{1-\alpha}} = 1_{\frac{T_n}{n} \geq \frac{1}{2} + \frac{q_{1-\alpha}}{2\sqrt{n}}} \text{ est}$$

un test de niveau asymptotique α.