Statistiques fondamentales **Université Paris Diderot – M1**

Exercice 1 - Autour de la loi Géométrique

La loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$, est définie par

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{G}(p) = k\right) = (1-p)^{k-1}p,$$

pour $k \in \mathbb{N}^*$. La variance d'une telle loi est $\frac{1-p}{p^2}$. On se donne X de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
2. On se donne $p_0 > p_1$, et on souhaite tester $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p = p_1$. Montrer que le rapport de vraisemblance, noté $RV(x)$, est une fonction croissante en x.
3. En déduire, pour $\alpha > 0$, le test du rapport de vraisemblance au niveau α.

On se donne maintenant $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$.

4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de p, noté $\hat{p}$.
5. Montrer que $\hat{p}$ est consistant.
6. Étudier le comportement asymptotique de $\hat{p}$.
7. En déduire un test de niveau asymptotique α pour les hypothèses $H_0 : p = p_0$ contre $H_1 : p = p_1$, avec $p_0 > p_1$.

Exercice 2 - Un modèle gaussien

Dans cet exercice $X_1, \ldots, X_n, \ldots, \sim_{\text{i.i.d}} \mathcal{N}\big(\mu, \mathrm{Id}_2\big)$ avec $\mu \in \mathbb{R}^2$ inconnu non nul.

On cherche à estimer la direction θ de μ soit $\theta = (1/\|\mu\|_2)\mu$. On envisage l'estimateur $\widehat{\theta}_n = (1/\overline{X}_n)\overline{X}_n$.

1. Quelle est la limite en loi de $\sqrt{n}(\|\overline{X}_n\| - \|\mu\|)$?
2. La famille d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ est-elle consistante ?
3. La famille d'estimateurs $(\widehat{\theta}_n)_n$ est-elle asymptotiquement gaussienne ? Si oui préciser la matrice de covariance de la limite.
4. Proposer une famille de régions de confiance pour θ de taux de couverture asymptotique $1 - \alpha$.
5. Quel est l'estimateur au maximum de vraisemblance de θ ?

Exercice 3 - Exponentielles bilatères

Dans cet exercice, le modèle est constitué par les *distributions de Laplace* dont la densité sur $\mathbb{R}$ est donnée par $f_\mu(x) = \exp(-|x-\mu|)/2$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de localisation).

Les données $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées indépendamment identiquement distribuées selon une loi de Laplace de paramètre μ inconnu.

1. Quelle est l'espérance de la loi de densité f_μ ?
2. En déduire un estimateur $\widetilde{\mu} + n$ de μ par la méthode des moments.
3. Est il biaisé ?
4. Quel est son risque quadratique (pour une taille d'échantillon donnée) ?
5. La suite d'estimateurs est-elle consistante ?
6. Est-elle asymptotiquement normale ?
7. Proposer des intervalles de confiance de taux de couverture asymptotique $1-\alpha$ ($\alpha \in]0,1[$).
8. Ecrire la log-vraisemblance en μ d'un n-échantillon $x_1, \ldots, x_n$.
9. Le maximum de vraisemblance est il bien défini ? unique ?
10. Proposer un estimateur au maximum de vraisemblance $\widehat{\mu}_{2n+1}$ pour les échantillons de taille $2n+1$ impaire.
11. Quel est le biais de $\widehat{\mu}_{2n+1}$?
12. Donner une majoration (non triviale) de $P_\mu\big\{\widehat{\mu}_{2n+1} \geq \mu + \delta\big\}$ en fonction de δ et n.
13. La suite $(\widehat{\mu}_{2n+1})_n$ est-elle consistante ?