# Partiel 2022/2023 – Durée 2h

*Les documents et appareils électroniques (calculatrice, téléphone, ordinateur, ...) sont interdits.* ***Toutes les réponses doivent être justifiées.***

## Exercice 1 - Questions

1. Donner une définition de la loi du Chi-deux $\chi^2(n)$ et une définition de la loi de Student $\mathcal{T}(n)$.
2. Donner la définition de l'erreur de première espèce d'un test ainsi que de sa puissance, puis énoncer le théorème de Neyman-Pearson.
3. Durant les $n = 1000$ derniers jours d'ouverture de la bourse, on observe le rendement $x_i$ d'un actif. On suppose que ces rendements sont de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et l'on a calculé que leur moyenne empirique était de $\bar{x}_n = 0.0045$ et leur écart-type corrigé $\hat{\sigma}_n = 0.0144$. Donner un intervalle de confiance 95% pour $\mu$ puis formuler un test de l'hypothèse $\mu = 0$ contre $\mu \neq 0$.

## Exercice 2 - Un estimateur de covariance

Soit $Z = (X, Y)^T$ un vecteur Gaussien dans $\mathbb{R}^2$, centré, et de matrice de covariance

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{sh}(\theta) \\ \mathrm{sh}(\theta) & 1, \end{pmatrix},$$

où $\theta \in ]0, \mathrm{arcsh}(1)[$ est un paramètre à estimer. On rappelle que la fonction $\mathrm{sh}$ est définie par $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et est caractérisée par la relation $\mathrm{sh}'(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$. On observe $Z_1, \ldots, Z_n$ i.i.d. de loi $Z$.

1. Donner le modèle de cette expérience.
2. Montrer que $Z \sim (U, \mathrm{sh}(\theta)U + \sqrt{1 - \mathrm{sh}(\theta)^2}V)$, où $U$ et $V$ sont des variables Gaussiennes standard indépendantes.
3. Montrer que si $E \sim \chi^2(1)$, alors $\mathrm{Var}(E) = 2$.
4. En déduire que $\mathrm{Var}_\theta(XY) = 1 + \mathrm{sh}(\theta)^2$.
5. Déduire de $E_\theta(XY)$ un estimateur de $\theta$ (par la méthode des moments) et montrer sa consistance. On le notera $\hat{\theta}$.
6. Donner le comportement asymptotique de $\hat{\theta}$.
7. En déduire un intervalle de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ sur $\theta$.

**Exercice 3 - Pêche dans l'étang d'Orsay**

L'étang d'Orsay contient un nombre total $N$ connu de poissons. Parmi ces poissons, une proportion $p$ (inconnnue) sont des carpes. Pêcheur invétéré et statisticien, Pascal réalise en avril 2020 $n$ prises, notées $(X_1, \ldots, X_n)$, et note $Y_i$ la variable valant $1$ si $X_i$ est une carpe, $0$ sinon. On note $\mathcal{H}(n, p, N)$ la loi hypergéométrique de paramètres $n \leq N$, $p \in [0, 1]$, définie par

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{H}(n, p, N) = k\right) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

pour $k$ entre $0$ et $n$ (on suppose que $pN$ et $(1-p)N$ sont des entiers).

1. On note $S$ le nombre total de carpes pêchées par Pascal. Montrer que $S$ suit une loi hypergéométrique de paramètres $n, p, N$.
2. On admet que $(X_1, \ldots, X_n)$ est échangeable. Montrer que $\mathbb{E}(S) = np$. En déduire un estimateur sans biais de $p$.
3. Que vaut $\mathbb{E}(Y_1 Y_2)$ ? En déduire, pour $i \neq j$, $Cov(Y_i, Y_j)$. En déduire que
$$Var(S) = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$
4. À partir des deux question précédentes, construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $p$, où $\alpha \in ]0, 1]$ (on pourra majorer $p(1-p)$ par une constante). On le cherchera sous la forme $[\hat{p}_-, +\infty[$.
5. On suppose que $n$ et $p$ sont fixes, et que $N \to +\infty$. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\mathbb{P}(S = k) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
6. Utiliser l'inégalité de Hoeffding pour construire un intervalle de confiance **asymptotique** sur $p$ au niveau $1 - \alpha$, lorsque $N \to +\infty$.
7. Si la proportion de carpes descend en dessous de $10\%$ en 2020, l'ONF interdira la pêche dans l'étang d'Orsay en 2021. Construire un test permettant de garantir au niveau $\alpha$ l'ouverture de l'étang en $2021$ (par convention le niveau d'un test est son erreur de première espèce).
8. Application : Au cours d'avril 2020, Pascal a pêché $9$ poissons. On suppose que $N$ est suffisamment grand pour que $1 - 8/(N-1) \geq 9/10$. Quel nombre de carpes minimal Pascal doit-il avoir pêché pour être sûr à $90\%$ de ne pas perdre d'argent en renouvelant son permis de pêche ?